Dr. Martin Friesen & Jonas Kremer SS 2018

Maß- und Integrationstheorie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ die kleinste σ-Algebra auf Ω ist, so dass alle Projektionen $p_i : \Omega \to \Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathcal{A}/\mathcal{A}_i$-messbar sind.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Finden Sie zwei σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ mit zugehörigen Erzeugern $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$, so dass

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \neq \sigma(\{E_1 \times E_2 : E_1 \in \mathcal{E}_1 \text{ und } E_2 \in \mathcal{E}_2\}).$$

Warum steht ihr Beispiel nicht im Widerspruch zu Satz 11.3 aus der Vorlesung?
Hinweis: Sie können $\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, \Omega_1\}$ und $\mathcal{A}_2$ mit mindestens vier Elementen wählen.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$, Maßräume, so dass für jedes i das Maß μ_i σ-endlich ist. Konstruieren Sie, ein Maß μ auf $(\Omega, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n),$$

wobei $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots, n$, und $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$.
Hinweis: In der Vorlesung haben Sie die Aussage bewiesen für den Fall $n = 2$ (siehe Theorem 11.7). Sie können nun induktiv die Aussage für $n \geqslant 3$ zeigen.